

Matematica: modelli e algoritmi

Giovanni Righini

Fondazione “I Lincei per la Scuola” - Polo di Milano

21 novembre 2025



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO



I Lincei per la Scuola
Fondazione

La matematica computazionale

Il XX secolo ha segnato una svolta (anche) in matematica: è nata la **matematica computazionale**.

Da disciplina che studia “come **fare** i calcoli”
a disciplina che studia “come **far fare** i calcoli” (al calcolatore).

Da disciplina che **studia proprietà, enunciando teoremi**,
a disciplina che **studia come risolvere (algoritmicamente) problemi**.

Nascono nuovi criteri: **complessità, efficienza, . . .**

Questo cambio di paradigma dovrebbe riflettersi anche
nell'insegnamento scolastico della matematica.

Proposta n.1

Le **difficoltà di apprendimento in matematica** sono spesso dovute alla (o accentuate dalla) **mancanza di motivazione**.

Punto di vista neo-platonico: esistono delle verità matematiche. I matematici le **scoprono**, sospinti dalla loro curiosità intellettuale.

Punto di vista ingegneristico: esistono dei problemi da risolvere. I matematici **inventano** strumenti utili, sospinti dalla necessità.

Proposta n.1. *Passare dal metodo assiomatico al rispetto della realtà storica: dalle **applicazioni** allo sviluppo della **teoria**. Presentare i **concetti matematici** come **soluzioni di problemi (rilevanti)** altrimenti insolubili.*

Assumere un punto di vista meno assiomatico e più aderente alla realtà storica non significa

- insegnare meno **concetti matematici** (anzi, di più);
- sostituire le **conoscenze** con **abilità** né i **segmenti** coi **bastoncini**.

Proposta n.2

Causa di **difficoltà di apprendimento in matematica** è anche la **frammentazione dei contenuti**.

Proposta n.2. *Adottare un approccio **modellistico**: la matematica come linguaggio per descrivere sistemi e problemi.*

In un modello matematico entrano in gioco contemporaneamente numeri, insiemi, funzioni, sistemi di equazioni e disequazioni, relazioni logiche, enti geometrici, vettori e matrici, probabilità e distribuzioni,...

- Modelli **descrittivi**: fisica
- Modelli **predittivi**: statistica
- Modelli **prescrittivi**: ricerca operativa

Modelli matematici

Fisica

- modelli di sistemi
- grandezze continue
- equazioni
- soluzione unica
- senza obiettivi
- scopo descrittivo

Ricerca operativa

- modelli di problemi
- grandezze anche discrete
- disequazioni
- soluzioni multiple
- un o più obiettivi
- scopo prescrittivo

Da risolvere a decidere.

Dalla matematica nel continuo alla matematica nel discreto.

Una citazione interessante

?Cum enim mundi universi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaequam eluceat; quamobrem dubium prorsus est nullum, quin omnes mundi effectus ex causis finalibus ope methodi maximorum et minimorum aequae feliciter determinarim queant, atque ex ipsis causis efficientibus.?

L. Euler, De Curvis Elasticis, Additamentum I, in Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes, 1744) *Nulla*

accade nel mondo, che non abbia una spiegazione in termini di massimo o minimo.

Tutta la matematica e tutta la fisica si potrebbero illustrare come ricerca di massimi e minimi.

Ottimizzazione

Molti problemi tradizionali posso essere riformulati in forma di problemi di ottimizzazione.

Problema A (calcolo): La mamma va al mercato e compra 3 confezioni da 6 uova. Lungo la strada si rompono 5 uova. Quante uova restano alla mamma per fare le torte?

Risposta: $3 \times 6 - 5 = 13$ uova.

Problema B (ottimizzazione): Alla mamma servono almeno 10 uova per fare le torte. Sapendo che le uova si comprano in confezioni da 6 e che per strada potrebbero rompersene 5, quante confezioni deve acquistare la mamma al mercato come minimo?

Risposta: $\min x : 6x - 5 \geq 10$ da cui $x = \lceil \frac{15}{6} \rceil = \lceil \frac{5}{2} \rceil = \lceil 2,5 \rceil = 3$ confezioni.

Ottimizzazione

Il problema A è di calcolo e ha **una sola soluzione possibile**; il problema B è di ottimizzazione e ha **infinite soluzioni possibili** (azioni della mamma che rispettano il vincolo): lo scopo è di trovare la migliore.

Concettualmente c'è un salto importante, ma i bambini delle scuole elementari (!) sono perfettamente in grado di capirli entrambi e di risolverli entrambi. Il problema B si può (eventualmente) risolvere per tentativi.

L'importante non è tanto l'algoritmo risolutivo quanto i concetti (matematici) fondamentali di «variabile», «soluzione», «vincolo», «obiettivo», «ottimizzazione».

Esempio dall'algebra

Problema A: risolvere l'equazione $(1/7 - 1/9)x = 50$.

Risposta: $x = 50 / (1/7 - 1/9)$ cioè $x = 50 \times 63/2$ cioè $x = 1575$ (facendo solo calcoli).

Problema B: (v. “Giochi matematici del medioevo”, raccolta di problemi dal Liber Abaci di Fibonacci, a cura di N. Geronimi, Bruno Mondadori, 2006).

Un leone si trova in un pozzo profondo 50 palmi. Durante il giorno risale il pozzo di $1/7$ di palmo ma durante la notte ridiscende di $1/9$ di palmo. Dopo quanti giorni riuscirà a raggiungere la cima del pozzo?

Risposta: $\min x : (1/7 - 1/9) \times (x - 1) + 1/7 \geq 50$, da cui $x = 1572$.

La (dis-)equazione (cioè il modello del problema) non è data ma è proprio quella che bisogna costruire, ragionando sul problema.

La risposta di Fibonacci nel Liber Abaci è sbagliata perché è sbagliato il suo modello, non per un errore di calcolo.

Proposta n.3

Non tutti i problemi si possono risolvere in modo **esatto** con una **formula**; alcuni richiedono un **algoritmo**.

Presentare solo problemi appositamente inventati per essere risolti in modo esatto con formule significa **adattare la realtà alla matematica**.

Proposta n.3: ***adattare la matematica alla realtà**, includendo la trattazione di **problemi che non si risolvono in forma chiusa**, o in modo **esatto**, ma richiedono un **algoritmo**, eventualmente di **approssimazione**.*

Anche gli algoritmi sono **concetti matematici**, oggetto di studio per la matematica, e hanno **proprietà matematicamente dimostrabili**:

- **Correttezza**: cosa garantisce l'algoritmo? Termina?
- **Complessità computazionale**: come dipende il consumo di spazio (memoria) e tempo di un algoritmo dalle dimensioni dei dati in ingresso?

Correttezza e complessità

Per dimostrare la **correttezza** di un algoritmo: **invariante di ciclo**.

Per dimostrare la **terminazione** di un algoritmo: **monotonicità (stretta) di una grandezza (discreta e finita)**.

Nel caso degli **algoritmi di ottimizzazione**, le garanzie da dimostrare sono tipicamente

- di **ottimalità** o di **approssimazione**;
- di **complessità**.

Il concetto di **complessità computazionale** è relativamente nuovo.

Nella matematica tradizionale un problema con un numero finito di soluzioni è banale: basta enumerarle tutte.

Complessità computazionale

Also in other disciplines it was recognized that while the assignment problem is a finite problem, there is a complexity issue. In an address delivered on 9 September 1949 at a meeting of the American Psychological Association at Denver, Colorado, Thorndike [1950] studied the problem of the ‘classification’ of personnel (being job assignment):

The past decade, and particularly the war years, have witnessed a great concern about the classification of personnel and a vast expenditure of effort presumably directed towards this end.

He exhibited little trust in mathematicians:

There are, as has been indicated, a finite number of permutations in the assignment of men to jobs. When the classification problem as formulated above was presented to a mathematician, he pointed to this fact and said that from the point of view of the mathematician there was no problem. Since the number of permutations was finite, one had only to try them all and choose the best. He dismissed the problem at that point. This is rather cold comfort to the psychologist, however, when one considers that only ten men and ten jobs mean over three and a half million permutations. Trying out all the permutations may be a mathematical solution to the problem, it is not a practical solution.

Perché usare i modelli matematici

Perché usare i modelli matematici dei problemi decisionali?

- Per definire bene il problema
- Per comunicarlo ad altri (e al calcolatore)
- Per classificarlo
- Per valutarne la complessità
- Per scegliere il metodo giusto per affrontarlo
- Per poter usare il software già esistente
- Per riconoscere sottoproblemi
- Per mantenere distinto il problema dal metodo risolutivo.

Modelli e dati: la scienza delle decisioni

